SUCESIONES

A) DEFINICIÓN

$a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$\{a_n\}_{n\geq 1} : Sucesión$

a_n : Término general

B) SUCESIÓN MONÓTONA

Es aquella sucesión que es creciente o decreciente

La sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es:

- Creciente: Si $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n \geq 1$
- Decreciente: Si $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \geq 1$

C) SUCESIÓN ACOTADA

La sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es:

- Acotada superiormente si $a_n \leq M$, $\forall n \geq n_o$
- Acotada inferiormente si $L \leq a_n$, $\forall n \geq n_o$
- Acotada si es acotada superior e inferiormente

D) CONVERGENCIA Y DIVERGENCIA

La sucesión $\{a_n\}$ ¿converge ó diverge?

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} L \in \mathbb{R} \ \to \{a_n\} : converge \\ \pm\infty \ ó \ \nexists \to \{a_n\} : diverge \end{cases}$$

E) TEOREMA:

Una sucesión que es monótona y acotada es convergente

Obs:

- Si una sucesión es convergente, se cumple: $\lim_{n\to\infty} a_{n+k} = \lim_{n\to\infty} a_n$, para todo $k \in \mathbb{N}$

1. PC2 (20-2)

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{6} \\ a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \ , \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a) Use inducción para probar lo siguiente: $\forall n \in \mathbb{N}, [a_n < a_{n+1} < 3]$

b) Justifique por qué $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

c) Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$

CALCULO DE LÍMITES

LÍMITES NOTABLES

- $\frac{1}{\infty} = 0$; $\frac{1}{0} = \infty$; $\infty + \infty = \infty$; $Ln(\infty) = \infty$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0, & si \ |r| < 1 \\ 1, & si \ \ r = 1 \\ \infty, & si \ \ r > 1 \end{cases}$

2. PC2

Calcular el valor de los siguientes límites:

a) (20-2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 6^n}$

b) (20-2) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n$

c) (18-1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\left(\frac{7}{8}\right)^n + \left[\!\left[2 - \frac{1}{n} \right]\!\right] + 3^{1^n}}$

d) (16-2) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{e^n + 5^{n-2}}{5^n} \right)$

3. PC2 (18-2)

En una economía cerrada y sin gobierno las variaciones del producto, por el lado de la demanda, se deben exclusivamente a variaciones del consumo y de la inversión. El gabinete de asesores del Ministerio de Economía ha determinado que las variaciones del consumo en el año n con respecto al año anterior viene dada por la sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la cual es muy estable mientras que la variación de la inversión en el año n con respecto al año anterior, $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$, resulta ser un componente de volatilidad en la economía ya que estas variaciones son fluctuantes. Así, han concluido que ambas variaciones son muy bien aproximadas por las siguientes sucesiones:

$$c_n = \frac{5n}{4n-1}, \ i_n = \left| 1 - \frac{3}{n} \right|$$

a) Determine si la variación del consumo y la variación de la inversión son monótonas. Si lo son demuéstrelo y mencione el tipo de monotonicidad. Si no lo fueran justifique apropiadamente.

b) Determine la variación del consumo a largo plazo.

c) Determine la variación de la inversión a largo plazo.

4. PC2 (18-2)

Un control de Matemática I contiene un número infinito de preguntas. La k-ésima pregunta con respuesta correcta recibe de puntaje $\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$.

a) Sea S_n el puntaje obtenido por haber respondido n preguntas correctas. Exprese S_n como una sumatoria.

b) ¿Cuántas preguntas, como mínimo, se deben responder correctamente para obtener al menos 2 puntos?

c) Si se responde correctamente todas las preguntas, calcule el puntaje total obtenido.

(**Sugerencia:** $\frac{1-x^n}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}$ cuando $x\neq 1$)

5. PC2 (18-1)

En el modelo de oligopolio de Cournot hay n empresas que compiten en el mercado de un producto homogéneo decidiendo qué cantidades de producción ofertan al mercado. Sea q_i la cantidad producida por la i−ésima empresa. El precio P del producto queda determinado por $Q=\sum_{i=1}^{n}q_i$, la cantidad total ofertada por las n empresas, de acuerdo con la relación lineal $P=a-bQ$ donde $a,b\in\mathbb{R}$ son constantes positivas. Considere que el costo de producción unitario de cada empresa es $C_u=c$ (siendo $c<a$) y los costos fijos son cero. Bajo estas condiciones, se determina que la cantidad de producción óptima de cada empresa es $q_i^{opt}=\frac{a-c}{(n+1)b}$

a) Determine el precio del producto cuando cada empresa produce la cantidad óptima.

b) Determine la utilidad U_i de cada empresa cuando produce la cantidad óptima.

c) A medida que el número de empresas crece ilimitadamente, ¿a dónde tiende el precio del producto?

6. PC2 (17-1)

La utilidad de una empresa en millones de soles en el año n se denota por U_n. La utilidad del presente año es de U_0 = 2 millones de soles y el próximo año se estima que será de 3 millones. La variación de la utilidad en el año n es la diferencia entre la utilidad de dicho año y la utilidad el año anterior. El modelo de crecimiento de la utilidad de la empresa dice que la variación de la utilidad en cualquier año es igual a la a la mitad de la variación de la utilidad en el año anterior.

a) Complete: El primer término de la sucesión utilidad es $U_0=$ ___ , el segundo término es $U_1=$ ___ y la fórmula recursiva es $U_n=$ _________ , para $n\geq$ ___

b) Calcule una fórmula cerrada (no recursiva) para la utilidad de la empresa.

c) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty}U_n$. Interprete el resultado.

LÍMITES INDETERMINADOS

A) $Caso\ \frac{\infty}{\infty}:\begin{cases}\underline{Si\ hay\ Polinomios}:\\ Factorizar\ el\ término\ de\ mayor\ grado\\ \quad del\ numerador\ y\ denominador\end{cases}$

7. PC2

Calcular el valor de los siguientes límites:

a) **(20-2)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{25n^4+4n^6}{36n^3+9n^6}$

b) **(17-1)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5^{3-n}}-\sqrt[n]{5^{1-2n}}$

B)

C) $Caso\ \infty-\infty:\begin{cases}Multiplicar\ \ por\ la\ conjugada\\ ó\ el\ trinomio\end{cases}$

8. PC2

Calcule los siguientes limites:

a) **(19-2)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n}}-n\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{2n}\right)\right]$

b) **(19-2)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{e^{2n}-e^n}-e^n$

c) **(16-2)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{(n+\pi)(n+e)}\right)$

D) $Caso\ \ sen(\infty)\ ó\ \cos(\infty):\begin{cases}Usar\ Teor.del\ Sandwich\\ y\ recordar:-1\leq senx\leq 1\\ \qquad\qquad -1\leq\cos x\leq 1\end{cases}$

9. PC2 (17-1)

Si para todo $n\in\mathbb{N}$, $-1<a_n\leq 0$, calcule $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_n^2}{n^2}$

10. PC2 (18-2)

a) Complete los espacios en blanco.

i. Si $\forall n\in\mathbb{N}$, ___ $\leq$ ___ $\leq b_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$ _______ $=L$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=$ _______

ii. Si $\lfloor nx\rfloor=m$ entonces por definición ____ $\leq nx\leq$ ____. Restando 1 a estas inecuaciones se obtiene ____ $\leq$ ____ $\leq m$

b) Calcule $\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{n}$, donde $x \in \mathbb{R}$ es una constante.

Teórica

11. PC2 (20-2)
Dada la siguiente proposición:
Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |L|$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = L$
Determine el valor de verdad.

DEFINICION DE LÍMITES

12. PC2 (20-2)
Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definido por $a_n = \frac{4n+1}{5n+2}$. Si N es un número natural para el cual se cumple lo siguiente:
$\forall n \in \mathbb{N}, \left[n > N \to |a_n - L| < 10^{-2} \right]$, donde L es el límite de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Complete:

- $L =$ ________
- $N =$ ________

13. PC2 (19-2)
Justifique por qué los siguientes enunciados son falsos:

a) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $n > N \to \left| \frac{(-1)^n}{n} - 1 \right| < \varepsilon$

b) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

14. PC2 (19-2)
Sea $b \in \mathbb{R}^+$

a) Por definición, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+b} = 1$ se expresa como $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ____________

b) A partir de la definición anterior, un valor de N, en términos de ε ε, es $N =$ ________

c) Verifique que dicho N satisface la definición de límite.

15. PC2 (18-1)
Sea la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $a_n = n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

a) Muestre que $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $[a_n > M]$

b) ¿Es la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente? Justifique su respuesta

c) Calcule: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{\sqrt{a_n}}$

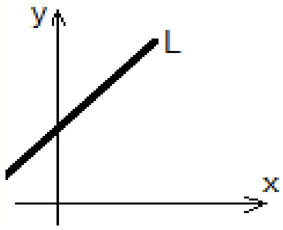
RECTAS

A) PENDIENTE (m)
Indica la inclinación de la recta.

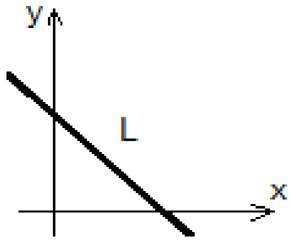
- **Con el ángulo de inclinación:** $\boxed{m = tan(\alpha)}$
- **Con dos puntos:** $\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$

Obs:

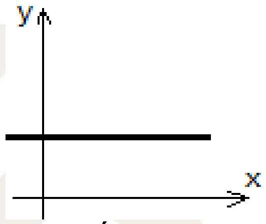
$m > 0$



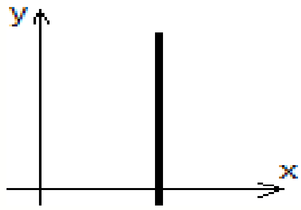
$m < 0$



$m = 0$

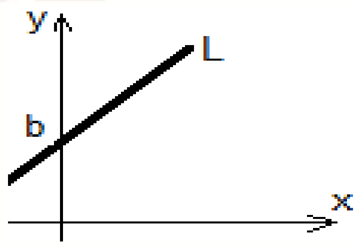


$m: No\ existe$



B) ECUACIÓN DE RECTA (m)

- **Punto de paso – pendiente:** $\boxed{y - y_o = m(x - x_o)}$
- **Pendiente – Ordenada en el origen:** $\boxed{y = mx + b}$



16. PC2 (20-2)
Con respecto a un paralelogramo $\overline{ABCD}$, se tiene la siguiente información:

- El vértice $A = (2,1)$
- El punto de intersección de las diagonales es $M = (6.5, 2)$
- La pendiente de la recta que contiene al lado $\overline{CD}$ es $-\frac{4}{5}$
- La pendiente de la recta que contiene a la diagonal $\overline{DB}$ del cuadrilátero $\overline{ABCD}$ es −10.

a) Determine los vértices B, C y D

b) Calcule el área del paralelogramo $\overline{ABCD}$.

17. PC2 (20-2)

Considere las rectas $L_1: 5x+\left(k^2-4\right)y+9=0$ y $L_2: (-3k)x+5y+2=0$, donde $k \in \mathbb{R}$. Si $L_1 \perp L_2$ y el y-intercepto de L_1 es negativo, entonces el valor de k es ________

18. PC2 (20-2)

Dada la recta $l_1 = l\left(\frac{1}{3}, (0,-17)\right)$ y la recta l_2 que es perpendicular a l_1 e intersecta al eje x en el punto $A=(1,0)$. Si además, $\{B\} = l_1 \cap l_2$, $\{C\} = l_1 \cap eje\ x$, $\{D\} = l_1 \cap eje\ y$ y $\{E\} = l_2 \cap eje\ y$, complete lo siguiente:

- $B = (\_\_\_, \_\_\_)$
- El área del triángulo $\overline{DEC}$ es:_________ unidades cuadradas.

19. PC2 (19-2)

Sea L una recta de pendiente $m \in \mathbb{R} - \{0\}$ que pasa por el punto $(-2,2)$

a) Complete:

- La ecuación punto pendiente de L es _____
- El x-intercepto de L ______
- El y-intercepto de L ______
- La ecuación doble intercepto de L es _______

b) Si el triángulo formado por L y los ejes coordenados en el segundo cuadrante tiene área igual a 9, determine la(s) ecuación(es) pendiente intercepto de L.

20. PC2 (19-1)

Sean los puntos $A=(4,4)$, $B=(6,8)$ y $C=(7,7)$

a) Determine por extensión el siguiente conjunto:

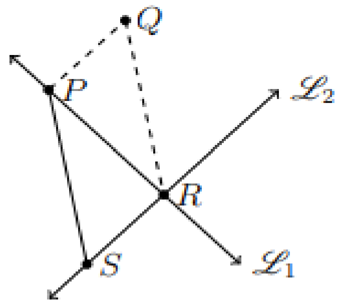
$$X = \left\{ D \in \mathbb{R}^2 : \overline{AB} // \overline{CD}\ y\ ABCD\ es\ un\ paralelogramo \right\}$$

b) La recta L pasa por A y C. Calcule el punto $Q \in L\left(Q \neq A\ y\ Q \neq C\right)$ sabiendo que $d(A,B) = d(B,Q)$

21. PC2 (18-2)

En la figura adjunta:

- $PQRS$ es un paralelogramo
- El área del triángulo PRS es $6u^2$
- $L_1: x+y=13$
- L_2 pasa por $(1,-2)$
- L_2 es perpendicular a L_1
- Distancia de S a L_1 es $2\sqrt{2}u$



a) Calcule las coordenadas del vértice R.
b) Calcule las coordenadas del vértice S.
c) Calcule las coordenadas del vértice P.
d) Calcule las coordenadas del vértice Q.

22. PC2 (18-1)

Determine para que valores de α las rectas de ecuaciones $2x+\left(\alpha^2-1\right)y-8=0$, $(\alpha+1)x-y+21=0$ son perpendiculares.

23. PC2 (18-1)

Sean $A=(-5,5)$, $B=(1,7)$ y $C=(9,-2)$ los vértices de un triángulo.

a) ¿Es un triángulo rectángulo?

b) Sea l_1 la recta que pasa por A y C, y l_2 la recta perpendicular a l_1 que pasa por el punto B. Determine el punto de intersección de l_1 con l_2

c) Calcule la distancia del punto B a la recta l_1

24. PC2 (17-1)

Sean L_1 y L_2 dos rectas de ecuaciones $L_1: y = m_1x + b_1$ y $L_2: y = m_2x + b_2$ donde $m_2 < m_1 < 0 < b_1 < b_2$ y $m_2b_1 < m_1b_2$.

a) Si $P = \left(x_0, y_0\right)$ es el punto de intersección de L_1 y L_2, determine en que cuadrante se encuentra P.

b) Si x_1 es el x- intercepto de L_2. ¿Quién es mayor, x_1 o x_2?

25. PC2 (16-2)

Los puntos $A=(-2,-1)$, $B=(2,-2)$, $C=(1,3)$ y $D=(2,-2)$ son los vértices de un cuadrilátero.

a) En el plano de coordenadas adjunto grafique el cuadrilátero $ABCD$

b) Determine:

- La ecuación general de la recta que pasa por D y B
- La longitud del segmento $\overline{DB}$
- El área del cuadrilátero $ABCD$

26. PC2 (12-2)

a) Muestre que los puntos $P=(6,2)$, $Q=(16,4)$, $R=(10,8)$, y $S=(0,6)$ forman un paralelogramo.

b) Calcule la altura del triángulo PQR trazada del vértice R al lado PQ.

c) Calcule el área del paralelogramo.

27. PC2 (12-2)

a) Dé la definición formal de recta como se hizo en clase. (Observación: definiciones “equivalentes” no recibirán puntaje).

b) Demuestre que si la pendiente no es horizontal entonces la ecuación de una recta se puede expresar como $x=ky+c$ (Observación: Debe considerar dos casos)

28. PC2 (12-2)

Si la recta l_1 tiene ecuación $k^2x+(k+1)y+3=0$ y la recta l_2 tiene ecuación $3x-2y-11=0$, ¿para qué valores de k las rectas son paralelas?

29. PC2 (12-1)

Un triángulo equilátero tiene un vértice en el punto P = (3, 4) y los otros dos en la recta de ecuación x + y = 3. Encuentre las coordenadas de los otros dos vértices. (El gráfico puede ser de ayuda)

30. PC2 (12-1)

Indique si la afirmación es Verdadera o Falsa y justifique: pend((1, 3),(1, −1)) = pend((2, 1),(2, −1))

APLICACIÓN (OFERTA Y DEMANDA)

I. OFERTA

a) Definición:

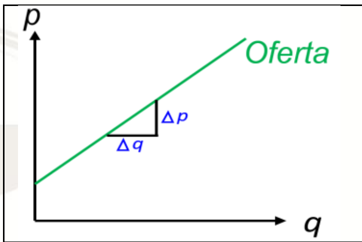
Se define como **la cantidad de productos que el *productor*** tienen la capacidad de ofrecer.

p : precio del producto

q : número de unidades producidas

b) Ley de la oferta:

- Un aumento del precio (p) indica un aumento de la cantidad ofertada (q).
- Una disminución del precio (p) indica una disminución de la cantidad ofertada (q).



$$m_{Oferta}=\frac{\Delta p}{\Delta q}>0$$

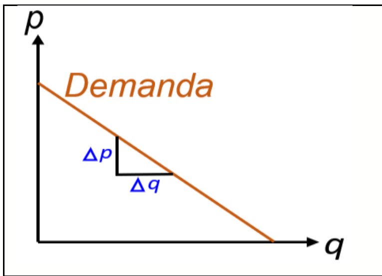
II. DEMANDA

a) Definición:

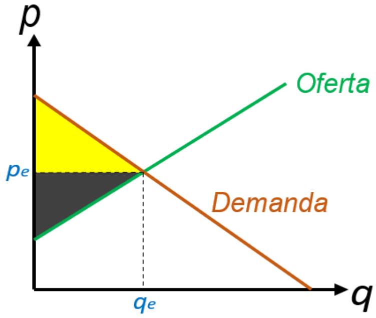
Se define como **la cantidad de productos que el *consumidor*** tienen la capacidad de adquirir.

b) Ley de la demanda:

- Un aumento del precio (p) indica una disminución de la cantidad demanda (q).
- Una disminución del precio (p) indica un aumento de la cantidad demanda (q).

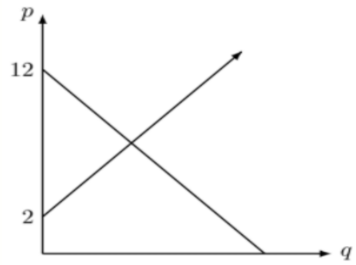


$$m_{Demanda}=\frac{\Delta p}{\Delta q}<0$$



31. PC2 (20-2)

Sea (q_e, p_e) el punto de equilibrio entre la oferta y la demanda de cierto producto, donde $p_e, q_e \in \mathbb{R}^+$ son constantes positivas. Además, considere que la oferta y la demanda son relaciones lineales, que las rectas que las representan son perpendiculares y que por cada tres unidades monetarias en que disminuya el precio unitario el productor dejará de vender una unidad. Considere el siguiente gráfico de la oferta y la demanda.

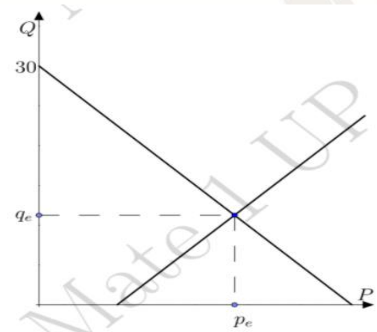


Si EC y EP representan al excedente del consumidor y del productor, respectivamente, complete lo siguiente:

- $q_e =$ ______
- $p_e =$ ______
- $EC =$ ______
- $EP =$ ______

32. PC2 (16-2)

Las gráficas de la Oferta y la Demanda de un bien z en el plano $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$ son perpendiculaes. Sabiendo que el punto de equilibrio es (p_e, q_e); determinar:

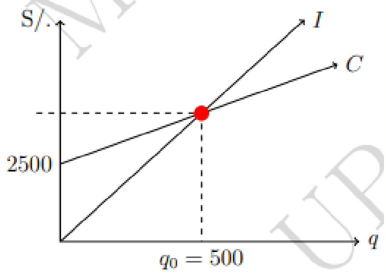


a) La ecuación pendiente-intercepto de la Demanda.
b) La ecuación punto-pendiente de la Oferta.
c) El excedente del consumidor.

33. PC2 (12-2)

En la figura se puede apreciar el Costo y el Ingreso de una empresa.

a) Asumiendo que la utilidad es lineal, calcule la ecuación de la utilidad.



b) Si el precio unitario y el costo unitario se duplican, ¿cuál debe ser el nuevo costo fijo para que la cantidad de equilibrio $q_0 = 500$ en la gráfica no cambie?

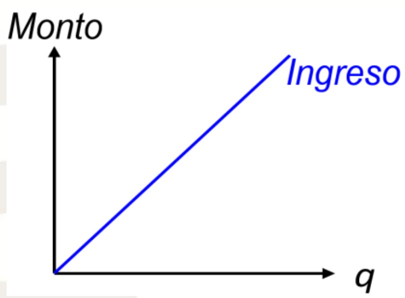
34. PC2 (12-1)

El capitán de un navío se encuentra en un mercado del caribe donde los productores de caña de azúcar hacen sus ventas. El capitán puede pagar 40 monedas de oro por 5 botellas de ron. El precio de equilibrio se establece en 7 monedas de oro por botella. El excedente del capitán es de 10 monedas de oro.

a) Encuentre la ecuación de la demanda del capitán.
b) Los productores ofertan 20 botellas a un precio mayor al que el capitán está dispuesto a comprarlas. La diferencia en estos precios por unidad es de 7 monedas de oro. ¿Cuánto debe subir el precio unitario para que los productores oferten 4 botellas adicionales?
c) Calcule el excedente de los productores.

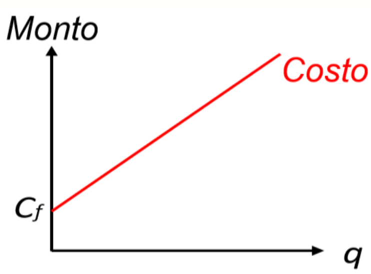
Ingreso

$$I = p \cdot q \left\{ m_{Ingreso} = p \right.$$

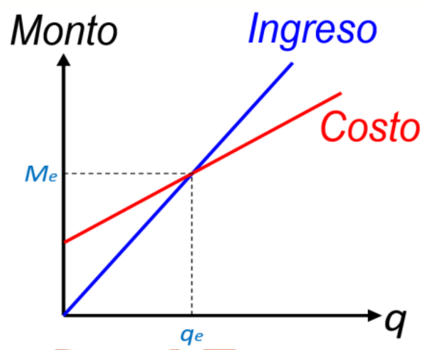


Costo

$$C = C_u \cdot q + C_f \left\{ m_{Costo} = C_u \right.$$



Utilidad



35. PC2 (20-2)

Los valores del costo fijo y monto de equilibrio de una empresa son S/1500 y S/2175, respectivamente. Además, el precio unitario p es superior al costo unitario c_u en S/20. Si q_0 es el nivel de producción de equilibrio y se considera que el ingreso y el costo total son relaciones lineales, complete:

- $q_0 =$ ______
- $p =$ ______
- $c_u =$ ______

36. PC2 (19-1)

Las constantes positivas P, C_u, C_f, q_0, M_0 representan el precio unitario, costo unitario, costo fijo, nivel de producción de equilibrio y monto de equilibrio respectivamente. Se sabe que $P > C_u$

a) Determine P y C_u en términos de q_0, M_0 y C_f

b) Un cambio exógeno resulta en nuevas constantes P^*, C_u^*, C_f^*, q_0^*, M_0^*. Si $C_f^* = C_f$, $P^* = P$ y $q_0^* \geq 4q_0$, determine los posibles valores de C_u^* en términos de q_0, M_0 y C_f .

TRANSFORMACION

37. PC2 (19-1)

Un consumidor compra dos unidades a un precio total de 22 soles, y por una unidad adicional pedida el precio unitario disminuye en dos soles. El excedente del consumidor es 16 soles. Se sabe que la oferta y la demanda son lineales y perpendiculares.

a) Determine el punto de equilibrio.

b) Determine la ecuación general de la oferta.

c) Cambios en el mercado afectan la oferta transformando su ecuación en $p' = q'$. Si el cambio es modelo por $E_{(a,1)} \circ T_{(h,0)}$, determine el valor de los parámetros a y h.

38. PC2 (12-2)

a) La transformación de coordenadas $E_{(1,\sqrt{2})}$ se denomina:

b) La transformación de coordenadas $T_{(4,0)}$ se denomina:

c) Dé la definición de excedente del productor.

d) La proposición "En general, la pendiente es lo mismo que la razón de cambio", ¿es verdadera o falsa? Justifique su respuesta

e) Si $m \neq 0$ y a son constantes, ¿qué relación deben cumplir estas constantes para que la ecuación $x^2 - a^2 = m(x-a)$ tenga una única solución?

NUMEROS REALES

39. PC2 (12-2)

Encuentre el conjunto solución de la siguiente inecuación

$$\left|\frac{3x+5}{x}\right| \geq 2$$

40. PC2 (12-1)

Indique si la afirmación es Verdadera o Falsa y justifique:

a) $||x| - |y|| \geq |x + y|$

b) pend((1, 3),(1, −1)) = pend((2, 1),(2, −1))

c) *c)* (1 punto) $[\![x]\!] = [\![|x|]\!]$

Solución. **F**, si $x = -3$ entonces $[\![-3]\!] = -3$ pero $[\![|-3|]\!]$ =

d) $2+\sqrt{2}$ es racional.

41. PC2 (12-1)

a) Si A =] − 1, 2[, B =]0, +∞[calcule A ∩ B y A∆B.

b) Calcule el conjunto solución de la inecuación

$$\left|\frac{x+1}{x-2}\right| > 2$$

c) Si $k \in \mathbb{R}$ es una constante, calcule la ecuación general de la recta que pasa por el punto medio del segmento determinado por $(k, k+1)$ y $(k+2, k-1)$ y es perpendicular a dicho segmento.

42. PC2 (12-1)

a) Dé la definición de intervalo.

b) Dé la definición de cuando un conjunto no es un intervalo sin usar condicionales o la negación de proposiciones compuestas

c) Demuestre que la intersección de intervalos es un intervalo.