

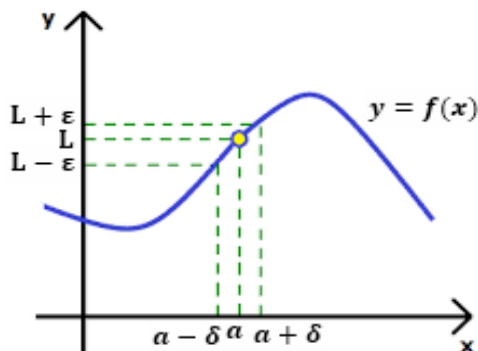
LÍMITES

DEFINICIÓN DE LÍMITE

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \equiv \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que si}$$

$$0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Representación gráfica



PC1 (14-2)

Usando definición de límite, demuestre que:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (-2x^2 + 5x + 4) = 7$$

SOLUCIÓN

Por definición tenemos: $\forall \varepsilon > 0$ se tiene $|f(x) - L| < \varepsilon$

En nuestro caso:

$$|f(x) - L| = |(-2x^2 + 5x + 4) - 7|$$

$$|f(x) - L| = |(-2x + 3)(x - 1)|$$

$$|f(x) - L| = |-2x + 3||x - 1|$$

Consideremos que el valor de $\delta = 1$

Con lo que $0 < |x - 1| < \delta = 1 \dots (1)$

$$-1 < x - 1 < 1$$

$$-1 < -2x + 3 < 3$$

$$0 \leq |-2x + 3| < 3$$

Luego, tenemos que:

$$|f(x) - L| = |-2x + 3||x - 1| < 3|x - 1| < \varepsilon$$

$$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{3} \dots (2)$$

El valor de δ a considerar será el que cumple las condiciones (1) y (2): $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{3} \right\}$

1. PC1 (17-2)

Considere la función con regla de correspondencia

$$f(x) = \frac{3x - 4}{2x - 5} \text{ y determine qué tan cerca de 3 debe}$$

estar x para garantizar que $f(x)$ se encuentre a una distancia menor a 0,2 unidades, respecto de 5. Acompañe su justificación analítica con una representación gráfica de la situación.

2. PC1 (17-1)

Considere la función $f(x) = \ln(x - 2)$ y determine qué tan cerca de 3 debe estar x para garantizar que $f(x)$ se encuentre a una distancia menor a 1, respecto de 0. Acompañe su justificación analítica con una representación gráfica de la situación.

3. PC2 (17-0)

Considere la función $f(x) = \arcsen x$ y determine

qué tan cerca de $\frac{\sqrt{3}}{2}$ debe estar x para garantizar que

$f(x)$ se encuentre a una distancia menor a $\frac{\pi}{6}$,

respecto de $\frac{\pi}{3}$. Acompañe su justificación analítica con una representación gráfica de la situación.

4. Usando definición de límite, demuestre que:

a) PC1 (15-2) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x^2 + 5}{x} \right) = \frac{13}{2}$

b) PC1 (15-0) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(5 - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) = 2$

c) PC1 (14-2) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{4x - 2} = \sqrt{2}$

d) PC1 (14-1) Si $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ es $f(x) = \sqrt{3x + 6}$ demuestre que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$

e) PC1 (14-0) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2x - 3} = 1$

f) PC1 (14-0) $\lim_{x \rightarrow 1} (-2x^2 + 5x + 4) = 7$

g) PC1 (13-2) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$, si $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

h) PC1 (12-2) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \left(\frac{1}{x} \right) = 3$

i) PC2 (12-0) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x - 2}{2x + 3} \right) = -3$



j) **PC2 (11-2)** $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x-1} = \sqrt{2}$

k) **PC2 (10-1)** $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x+5}{x+1} \right) = 2$

l) **PC2 (09-2)** $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x-3}{x+3} = -7$

m) **PC2 (08-2)** $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 5x + 6) = 2$

n) **PC2 (08-1)** $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^2 - 4}{x + 2} \right) = -4$

o) **PC2 (08-1)** $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - x + 1) = 16$

p) **PC2 (07-2)** $\lim_{x \rightarrow -2} (2x^2 - 3x) = 14$

q) **PC1 (07-0)** $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x+2} \right) = 1$

r) **PC1 (06-2)** $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 5) = 1$.

s) **PC2 (06-1)** $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{4x^2 - 8x + 4} + 2) = 2$

t) **PC2 (01-1)** $\lim_{x \rightarrow 1} (2 - 3x) = -1$

5. PC1 (15-1)

Dada la función f definida por $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 2}{x - 1}$,

para $x \neq 1$.

a) Halle L en $\mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = L$; luego, usando definición de límite, comprobar que el valor hallado de L es correcto.

b) Encuentre un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - 3| < \delta$, implica $-2 < f(x) < 0$.

6. PC1 (14-1)

Si α y β son números reales positivos, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$

y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$, usando la definición, demuestre que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha L + \beta M$$

7. PC1 (14-1)

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$, $L \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$,

demuestre que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

8. PC1 (12-0)

Analice la verdad o falsedad:

Si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 7$, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x| < \delta \text{ implique que } f(x) > \frac{13}{2}.$$

9. PC1 (13-1)

Dado que $\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1) = 5$, determine $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - 2| < \delta \text{ implique } |2x - 4| < 0.002.$$

10. PC1(13-0)

Sean las funciones $f(x) = \frac{x+4}{x}$ y $g(x) = \sqrt{x-1}$.

a) Halle la regla de correspondencia de la función $g \circ f$, indicando su dominio.

b) Usando la definición de límite, demuestre que: $\lim_{x \rightarrow 4} (g \circ f)(x) = 1$

11. PC1(12-2)

La velocidad V (en cm/s) con la que se mueven las moléculas de un gas en un recipiente cerrado viene dada en función de la temperatura T del recipiente (en grados Kelvin) por la formula $v = \frac{0.09T}{10-T}$. Sabemos además que

para que dicho gas pase a su estado líquido, la velocidad V de sus moléculas debe ser inferior a 0.01 cm/s. Encuentre un valor de $\delta > 0$ tal que si la temperatura T del recipiente es menor que δ entonces el gas pasara a su estado líquido.

12. PC1(12-1)

a) Dado que $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x - 1) = 2$, determine $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - 3| < \delta \text{ implique } |x^2 - 2x - 3| < 0.003$$

b) Desde que $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x+1}{1-x} = 4$, halle un $\delta > 0$ tal que si

$$0 < \left| x - \frac{1}{2} \right| < \delta \text{ entonces } \left| \frac{2x+1}{1-x} - 4 \right| < 0.001$$

13. PC1 (07-0)

Demuestre que si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe,

entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

14. PC1 (06-2)

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y α es una constante distinta de cero, demostrar usando la definición de límite que $\lim_{x \rightarrow a} \alpha f(x) = \alpha L$.

15. PC2 (03-2)

Dada la función f definida por $f(x) = -2x + 3$

a) Hallar $L = \lim_{x \rightarrow -2} (-2x + 3)$ y compruebe su resultado

usando la definición de límite.

b) Hallar un intervalo abierto I de centro en $x_0 = -2$ tal que para cada $x \in I$ se cumple $|f(x) - L| < 0.22$. Interpretar gráficamente.

16. PC2(03-2)

- a) Si existe $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ y existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ¿existe $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$? Justificar su respuesta usando propiedades de límites.
- b) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ demostrar que $\lim_{x \rightarrow a} [-f(x)] = -L$

17. PC2(02-2)

Dada la función: $f(x) = 4x - 2$.

- a) Demostrar, usando la definición, que: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.
- b) ¿Qué tan cerca de 1 debe estar x para que $f(x)$ diste de 2 en menos de 0.01?

18. PC2(02-2)

Dada la función $f(x) = 7 - 4x$.

- a) Calcular el valor del límite de f en el punto $a = 3$, luego usando la definición del límite; demostrar el resultado obtenido.
- b) Determinar un intervalo abierto I de centro $a = 3$ tal que $f(x) < 0, \forall x \in I, x \neq a$.

CÁLCULO DE LÍMITES

Propiedades

Si los límites $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existen, entonces:

- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \left[\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right]$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$; siempre que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$

LÍMITES ALGEBRAICOS

19. PC1 (20-0)

Dado el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{2x^2 + ax + b}$$

- Encuentre todos los valores de a y b para que dicho límite sea igual a 1.
- Encuentre todos los valores de a y b para que dicho límite no exista.

20. PC1 (18-2)

Respecto al límite

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - ax - 3b}$$

Analice el valor de verdad de cada afirmación. Justifique apropiadamente.

- si $a + b < 3$ entonces el límite existe.
- Si el límite es igual a 9 entonces $b = 0$
- Si $a + b = 3$ entonces el límite existe.

21. PC1 (18-1)

- Encuentre todos los valores de a y b para los cuales:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + ax + b} = -1$$

- Encuentre todos los valores de a y b para los cuales:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + ax + b} \text{ no existe}$$

22. Calcule los siguientes límites:

- PC1 (16-2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 - 3}{x - 1}$
- PC1 (16-2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 + \dots + x^n - n}{x - 1}$
- PC1 (14-2) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2 + 3x + 2}$
- PC1 (14-1) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 2x^2 - 5x - 12}{x - 4}$

e) PC1 (13-1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{-2x^2 + 3x - 1}$

f) PC1(13-0) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - 16x + 20}{x^3 - x^2 - 8x + 12}$

g) PC1(12-1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^{-3} - 2^{-3}}{x}$

p) PC2 (09-2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2x} + \sqrt{6-2x}}{\sqrt{36-4x^2}}$

q) PC2 (09-1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{64-x^2} - \sqrt{16+x^2}}{x}$

r) PC2 (08-2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{2-\sqrt{2-x}}}$

s) PC2 (08-2) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, donde $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}{2x}$

t) PC2 (07-2) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2} \right)$

u) PC2 (07-1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

v) PC1(07-0) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{1 - \sqrt[3]{3-\sqrt{x-1}}}$

w) PC1(07-0) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(1-x)^2}$

x) PC1(06-2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$

y) PC1(06-2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2 (\sqrt{1+x^2} - x)}$

z) PC1(06-1) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x^2 - 9}{2x^2 + 7x + 3}}$

aa) PC1(06-1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x+1)(x+2)(x+3) - 24}{x^3 - 1}$

bb) PC1(06-1) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{2x+1}}$

cc) PC1(06-1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$

dd) PC1(05-2) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 2x^2 - 5x - 12}{\sqrt{x} - 2}$

ee) PC1(05-2) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9} \right)$

ff) PC2 (05-1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}$

gg) PC2 (04-2) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+6} - 2}{x+2}$

hh) PC2 (04-2) $\lim_{x \rightarrow 12} \frac{x^3 - 10x^2 - 24x}{24 - 12\sqrt[3]{x-4}}$

ii) PC2 (04-1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3}$

jj) PC2 (04-1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{3-x}}{x-1}$

kk) PC2 (04-0) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 16}$

LÍMITES CON RADICALES

23. Calcule los siguientes límites:

a) PC1 (20-0) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+x^4} - \sqrt[3]{1+x^4}}{\sqrt[4]{1+x^4} - 1} \right)$

b) PC1 (15-2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+6} - 2}{x^2 - 1 - \sqrt{x+7}}$

c) PC1 (15-1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x-1)^{2/3} + 2(2x-1)^{1/3} + 1}{4x}$

d) PC1 (14-2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x^3-1} - 1}{4x-4}$

e) PC1 (13-2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7+x^3} - \sqrt{3+x^2}}{x-1}$

f) PC1(13-1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x^2+4}}{x-2}$

g) PC1(12-2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{1-2x}}{x}$

h) PC1(12-1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{2x^2 + x}$

i) PC2 (12-1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}$

j) PC2 (12-0) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt[3]{2x-3} - \sqrt{3-x}}{x-2} \right)$

k) PC2 (12-0) $\lim_{x \rightarrow 16} \left(\frac{x^2 - 256}{x - 2\sqrt{x} - 8} \right)$

l) PC2(11-2) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[n]{\frac{x^{3n} + x^{2n} - 2x^n}{3x^n - 3}}, n \in \mathbb{N}$

m) PC2 (10-2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+8} + \sqrt[3]{2-3x^2} - 2}{x-1}$

n) PC2 (10-1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt{1-2x}}{x+x^2} \right)$

o) PC2 (09-2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^3} - \sqrt{1-x^2}}{x^2}$

II) PC2 (03-2) $\lim_{x \rightarrow 81} \frac{3 - \sqrt[4]{x}}{9 - \sqrt{x}}$

mm) PC2 (03-2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}, \quad m, n \in \mathbb{N}$

nn) PC2(03-2)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 + 4x^4 - 12x^3 - 22x^2 + 59x - 30}{x^4 - 4x + 3}$$

oo) PC2 (03-1) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^4 - 81}{x^3 - 27} \right)$

pp) PC2 (03-1) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1 - \sqrt{3 + 2x}}{1 - \sqrt[3]{3 + 2x}} \right)$

qq) PC2 (02-2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x^3 - 8}$

rr) PC2 (02-2) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x + 2}{x^2 - 5x + 4} + \frac{x - 4}{3x^2 - 9x + 6} \right]$

ss) PC2 (02-2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[m]{x} - 1}$

tt) PC2 (02-1) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}$

uu) PC2 (02-1) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}, \quad m, n \in \mathbb{Z}^+$

vv) PC2 (01-2) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \left(\frac{x + 1}{2x^2 - 3x - 2} - \frac{x}{2x^2 + 7x + 3} \right)$

ww) PC2 (01-1) $\lim_{x \rightarrow 6} \left(\frac{\sqrt{x - 2} - 2}{x - 6} \right)$

24. PC1 (17-1)

Halle los números reales a y b tales que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax + b} - 2}{x} = 1$$

25. PC1 (14-1)

Calcule los números α y β tales que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\alpha x + \beta} - 2}{x} = 1$$

26. PC1 (14-1)

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ sabiendo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = 1 \text{ y } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 3$$

27. PC2 (11-2)

Calcular, si existe $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$, sabiendo que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{ y } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+1}} = 3$$

28. PC2 (11-1)

Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)}$ si $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{1 - \sqrt[3]{x}} = 9$ y

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{1 - \sqrt{x}} = -4$$

29. PC2 (11-1)

Si $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{ax+b} - 1}{x^3 + x - 10} = \frac{1}{3}$, encuentre los valores de las constantes reales a y b .

30. PC2(05-1)

¿Existe un número real a tal que $\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{ax - 10}{\sqrt{x + 4} - 3} \right)$

sea un número real? En caso afirmativo, encontrar los valores de a y del límite.

31. PC2(02-2)

Si $f(x) = \sqrt{x}$ calcular $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS

Límites notables

- i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
 ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$
 iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

CASO 1: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

32. PC1 (19-1)

Calcule los siguientes límites.

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} |\sin(x)| e^{\cos(1/x)}$
 b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos(1/x)}}{\cos(x + \pi) e^{1/x^2}}$

33. PC1 (19-0)

Analice el siguiente límite

$$\lim_{z \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{z}\right) \sin\left(\frac{z^2}{5}\right) \left[\frac{1 - \cos(3z)}{\sin^3(z)} \right]$$

34. PC1 (18-2)

Respecto al límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - k}{x^2}$$

Conteste las siguientes preguntas

- a) Calcule el límite cuando $k = 0$
 b) Calcule el límite cuando $k = 1$

35. Calcule los siguientes límites:

- a) PC1 (17-2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 + \cos(1/x))}{1 - \sqrt{1 + \sin(2x)}}$
 b) PC1 (17-1) $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\frac{2 \cos^2 \theta - 5 \cos \theta + 2}{2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta - 2} \right)$
 c) PC1 (17-1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^3}$
 d) PC1 (15-2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin(2x)} - \sqrt{1 - x \sin(3x)}}{x^2}$
 e) PC1 (15-1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2(2 - \sqrt{3 + \cos x})}{\tan(x) \sin^3 x}$
 f) PC1 (15-0) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\tan x}$
 g) PC1 (15-0) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sec x}{x^2}$

h) PC1 (13-2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}$

i) PC1 (12-2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \sin x)}{x}$

j) PC1 (12-1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + a) - \cos a}{x}, \quad a \in \mathbb{R}$
 constante

k) PC2 (09-2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

l) PC2 (07-1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot \sin 5x}{(x - x^3)^2}$

m) PC1 (06-2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos 2x}}{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

n) PC2 (05-1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^3} \right)$

o) PC2 (04-1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$

p) PC2 (01-2)

$$\lim_{x \rightarrow -5} \left(\frac{x^2 - 25}{\sqrt{x} - \sqrt{5}} \right) + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right) + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{\sin 3x} \right)$$

q) PC2 (01-1) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^2(h+a) - \sin^2 a}{h}$

36. PC1(06-2)

Calcular el valor de las constantes α y β , si

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{\alpha + \alpha \cos x}}{\sin^2(\beta x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

37. PC2(11-2)

Determine el valor de k para que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{kx^2 - 1 + \cos(x)}{\sin(x^2)} \right) = 0$$

CASO 2: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, con $x_0 \neq 0$

Calcule los siguientes límites, si existen:

38. PC1 (20-0)

Calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x) - 1}{\cos(2x) + 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \arctan\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}\right)$

39. PC1 (19-0)

Considere la función

$$f(x) = \frac{x-3}{|x-3|} \tan\left(\frac{\pi}{12}x + \pi\right)$$

- a) Analice la existencia de los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow 6} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

- b) Haga un esbozo de la gráfica de f en todo su dominio, considerando la información obtenida en a).

40. PC1 (19-0)

Analice el límite.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{2 \arctan(x - 2)}$$

41. PC1 (18-1)

Analice el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{x - \pi} \sin\left(\frac{nx}{2}\right)$$

Para cada valor de n :

- Calcule el límite cuando $n = 2$
- Calcule los límites laterales cuando $n = 1$.
- ¿Existe el límite cuando $n = 0$?
- Si k es un entero, calcule el límite cuando $n = 2k$.

42. PC1(17-2)

Hallar el valor de las constantes reales a y b , para que

$$\text{se cumpla } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x - (a-2b)\sin x + b}{(x-\pi)^3 + 2(x-\pi)} = 8$$

a) **PC2 (17-0)** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan(x)(2 - \cos(x) - \cos^2(x))}{x^3}$

b) **PC1 (16-2)** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\sin(x-1))}{(x-1)}$

c) **PC1 (16-1)** $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan(x-\pi) - \sin(x-\pi)}{(x-\pi)^3}$

a) **PC1 (14-2)** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x(x-1)}$

b) **PC1 (14-1)** $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right]}$

c) **PC2 (14-0)** $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3} \csc(x) - 2}{\csc(x) \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}$

d) **PC1 (13-2)** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{\sqrt{x} - 1}$

e) **PC1 (13-1)** $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{1 - 2 \cos(x)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}$

f) **PC1 (13-0)** $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\sqrt[3]{x^2 - 1} \cos\left(\frac{2\pi(x^2 + 1)}{x + 1}\right) \right]$

g) **PC1 (13-0)** $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}$

h) **PC1 (12-2)** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1 - \sqrt{x}}$

i) **PC2 (11-2)** $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos(x)}{\sin(2x - \frac{2\pi}{3})}$

j) **PC1 (12-1)** $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x}$

k) **PC2 (11-1)** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\pi}{4} - \arctan(2x - 1)}{x - 1}$

l) **PC2 (11-1)** $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \cos\left(\frac{1}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x \right]$

m) **PC2(10-2)** $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right)}{(\pi - 2x) \left[1 - \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right)\right]}$

n) **PC2(10-1)** $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{3 + 3 \sin(3x) + 2 \cos(x)}{2 \cos(x) + \sin(2x)} \right)$

o) **PC2(09-2)** $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{x - a}$

p) **PC2(09-1)** $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} - 2 \cos(x)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}$

q) **PC2(07-1)** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}\right)}{1 - \sqrt[3]{x}}$

r) **PC2(04-0)** $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos(x)}{\pi - 3x}$

s) **PC2(02-1)** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1 - \sqrt{x}}$

43. PC1(15-2)

Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \left[(x-1)^3 \sin^5\left(\frac{1}{x-1}\right) f(x) \right]$, si $|f(x)| \leq 3(x-1)^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$

44. PC1 (15-0)

Calcule $\lim_{x \rightarrow 4} g(x)$, sabiendo que $|g(x) + 5| \leq 3(4 - x)^2$

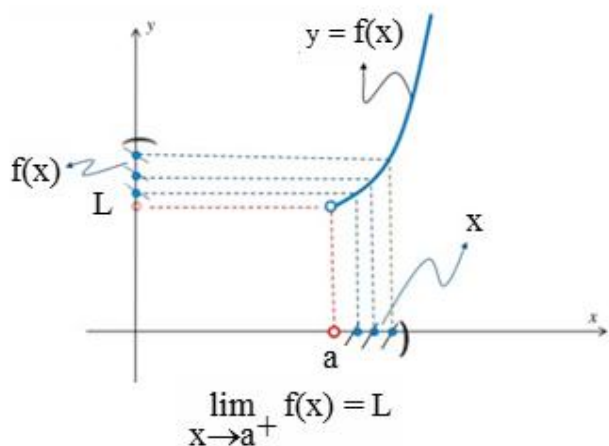
LÍMITES LATERALES Y EXISTENCIA

DEFINICIÓN DE LÍMITES LATERALES

Definición 1: (Por la Derecha)

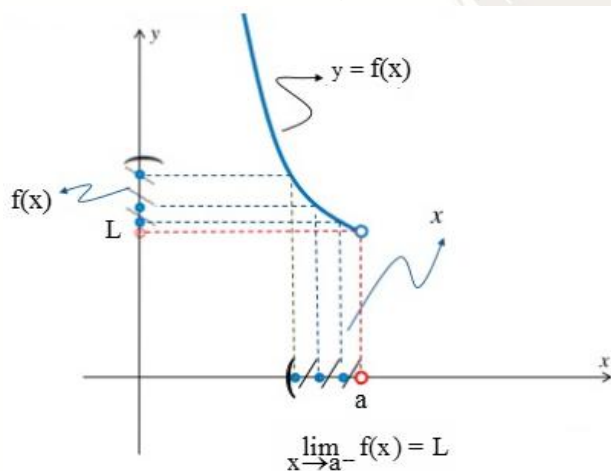
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \equiv \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que si } a < x < a + \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Representación gráfica



Definición 2: (Por la Izquierda)

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \equiv \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que si } a - \delta < x < a \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



PROPIEDAD

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ existe si y solo si existen los límites laterales y son iguales, esto es:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

PC2 (13-1)

Calcule el siguiente límite si es que existe

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{|x^2-1|+4x-20}$$

Solución

$$\text{Como } x \rightarrow 3^- (x < 3) \rightarrow \begin{cases} |x-3| = 3-x \\ |x^2-1| = x^2-1 \end{cases}$$

Ahora procederemos a calcular el límite

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-x}{x^2-1+4x-20}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-x}{x^2+4x-21}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-x}{(x+7)(x-3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-1}{(x+7)} = \frac{-1}{10} \quad \text{Rpta.}$$

I. POR DEFINICIÓN

45. PC2(08-2)

Explique, usando la definición el significado de:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1.$$

46. PC2 (08-2)

Usando la definición de límite, demuestre que:

$$\text{a) (11-1)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1, \quad \text{si}$$

$$f(x) = \begin{cases} 5-3x; & x > 2 \\ 4x-9; & x < 2 \end{cases}$$

$$\text{b) (06-2)} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-1} = 1$$

47. PC2(08-2)

Dada la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 4-5x, & \text{si } x > 2 \\ 2x-10, & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

a) Analice la verdad o falsedad de la siguiente afirmación: Si $0 < |x-2| < 0,02$, entonces

$$|f(x)+6| < \frac{1}{10}.$$

b) Halle $L \in \mathbb{R}$, si existe, tal que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L$. Luego,

usando la definición de límite, compruebe su resultado anterior e interprete gráficamente.

II. POR CÁLCULO

$$\text{A. CASO: } \frac{0}{0} \begin{cases} \text{En límite algebraico} \\ *Simplificar el término "x-a" \\ *Evaluar \\ \text{En límite trigonométrico} \\ *Usar propiedades \end{cases}$$

48. Calcule los siguientes límites

- a) PC1 (19-2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x - \ln(\sin x)}$
- b) PC1 (18-2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x \cos x)}{x^3}$
- c) PC1 (17-1) $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}, a > 0$
- d) PC2 (17-0) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{-x-1} - \sqrt{x^2-1}}{3x+3}$
- e) PC2 (17-0) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{-x-1} - \sqrt{x^2-1}}{3x+3}$
- f) PC1 (16-1) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2-1}}$
- g) PC2 (14-1) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - \sqrt{4x-3}}{\sqrt{x-2} - 1}$
- h) PC2 (12-2) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{2-x}$
- i) PC2 (11-2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(\frac{2x - \arctan(2x)}{\tan(4x)} \right) \sin \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right]$
- j) PC2 (10-1) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^2 \sin \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} \right)$
- k) PC2 (06-2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \frac{\sin x - \sin \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}}$
- l) PC2 (06-1) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2}, n \in \mathbb{Z}^+$
- m) PC2 (05-2) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2-x}{x - 2\sqrt{x-1}}$
- n) PC2 (04-1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^4 \left[1 + \cos \left(\frac{1}{x} \right) \right] \sec \left(\frac{1}{2x} \right)$
- o) PC2 (02-1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \left(\frac{\sqrt{1+6x}-1}{2\sqrt{x+1}} \right)}{x}$
- p) PC2 (00-2) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + |x^2 - 9|}{\sqrt{3-x}}$
- q) PC2 (00-2) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\sin(\pi x)}{x^2 - 4}$
- r) PC2(04-0) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x \ln x}, x > 0$

(Sugerencia: $x^x = e^{x \ln x}$).

B. FUNCIÓN PARTICIONADA

49. PC1 (20-0)

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2|x^2-9|+1}-1, & x < 3 \\ \frac{6-2x}{ax^2+b}, & 3 \leq x \leq 5 \\ \frac{\sin(x-5)}{x-5} + 3, & x > 5 \end{cases}$$

Determinar valores para a y b de manera que $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ existan.

50. PC1 (19-0)

Analice el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \text{ Sabiendo que:}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x^2-x}, & x < 1 \\ \sqrt{x^2-x+2}-x, & x \geq 1 \end{cases}$$

51. PC1 (19-0)

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + x - a}{x - a}, & x \neq a \\ a + 1, & x = a \end{cases}$$

- a) Considere el caso $a = -1$ y analice si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$. Justifique su respuesta.
- b) Considere el caso $a = 1$ y analice si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2$. Justifique su respuesta.

52. PC1 (17-2)

Sea la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(bx)-1}{4x^2}, & \text{si } x < 0 \\ \frac{ax^2 + b \sin\left(\frac{\pi x}{8}\right)}{x\sqrt{4-x}}, & \text{si } 0 < x < 4 \end{cases}$$

Halle el valor de las constantes a y b, para que los límites $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ existan.

53. PC1 (17-2)

Analice la existencia de los siguientes límites, en caso sea posible encuentre el valor de estos.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} (g(f(x)))$ donde $g(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 1}$, $x \neq -1$ y $f(x) = \begin{cases} (1-2x)^2 - 2e^{1-x}, & x < 2 \\ \sqrt[3]{1-2x}, & x \geq 2 \end{cases}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x^2}{1 - \sqrt{1 + \sin(2x)}} \arctan \left(\frac{x+1}{x^3 + \sin(x)} \right) \right]$

54. PC2 (17-0)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) \cos\left(\frac{4}{2x - \pi}\right), \text{ donde}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right), & x > \frac{\pi}{2} \\ 2\sqrt{\frac{\pi}{2} - x}, & x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

55. PC1 (16-1)

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \sin\left(\frac{x^2}{x-1}\right), \text{ sabiendo que:}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

56. PC1 (15-1)

$$\text{Dada la función } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{ax+b}-1}{x-3}, & x < 3 \\ \frac{x^2-8x+15}{x-3}, & x \geq 3 \end{cases}, \text{ halle}$$

los valores de a y b , si $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ existe

57. PC2 (15-0)

$$\text{Dadas las funciones } f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + 1, & x < 4 \\ 10, & x = 4 \\ 3x - 2, & x > 4 \end{cases} \text{ y}$$

$$g(x) = \frac{(x-1)^2 - 4}{x-2}. \text{ Halle } \lim_{x \rightarrow 5} (f \circ g)(x)$$

58. PC2 (14-2)

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} ax - 320 + b(x+4)^2 \sin\left(\frac{1}{x+4}\right), & \text{si } x < -4 \\ 25x + a, & \text{si } -4 \leq x \leq 2 \\ \frac{\sin(4x-8) + 2x - b}{x-2}, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Halle los valores de a y b , si existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, para

todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

59. PC2 (14-1)

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{x^2+5x+6}, & x < -3 \\ \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x-3}, & -3 < x \leq -2 \end{cases}$$

Halle los valores de a y b , si $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ existe

60. PC2 (14-0)

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2-4) + 2x - a}{x-2} & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x^3 - 3ax + 4b}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} & \text{si } 2 < x < 8 \\ \frac{\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt[3]{x} + b}{(x-8)^2} & \text{si } x \geq 8 \end{cases}$$

a) Halle los valores de a , b y M si $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = M$ existe.

b) Con los valores hallados en (a), analice si existe $\lim_{x \rightarrow 8} f(x)$.

61. PC2 (14-0).

$$\text{Sean } f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2} & \text{si } -1 < x < 0 \\ \frac{x+1}{x+2} & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ y}$$

$$g(x) = \sin(x), -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Calcule } M = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} (f \circ g)(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} (g \circ f)(x)$$

62. PC2 (13-2)

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2ax + b & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{bx^2 - 5ax + 9b}{1-x} & \text{si } 1 < x < 4 \\ ax - 3 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

, halle los valores de a y b , si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe para

todo $x_0 \in \mathbb{R}$

63. PC2 (12-2)

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2|x^2-9|} + 1 - 1}{6-2x} & \text{si } x < 3 \\ ax^2 + b & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \\ \frac{\sin(x-5)}{x-5} + 3 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

Determine los valores para a y b de manera que $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ existan.

64. PC2 (12-0)

Sea f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + (a-1)x + b}{x^2 + x - 2} & ; \text{si } x > 1 \\ \frac{\sqrt[3]{ax-3}-1}{c(x-1)} & ; \text{si } x < 1 \end{cases}$$

a) Si $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = L$, calcular los valores de a , b , c y L .

b) Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} (f \circ f)(x)$.

65. PC2 (11-2)

Considere la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha(x+4)^2 - \beta, & x < -2 \\ \sqrt{4-x^2} + 2\beta, & |x| \leq 2 \\ \frac{3}{4}\beta(x-4)^2 - \frac{4}{3}\alpha, & x > 2 \end{cases}$$

- a) Determine los valores α y β , si se sabe que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe para cualquier valor $a \in \mathbb{R}$.
- b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} (f \circ f)(x)$, si existe.

66. PC2 (11-1)

Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin\left(2x - \frac{5\pi}{2}\right) + \pi x - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2x - \frac{\pi}{2}}; & x < \frac{\pi}{4} \\ \frac{x^2 + kx - \frac{k\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{x - \frac{\pi}{4}}; & x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Si $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x)$ existe, encuentre el valor de k .

67. PC2 (10-2)

Sea g una función definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 + x + k}{x-1} + 1; & 0 < x < 1 \\ -ax + b + 5; & 1 \leq x < 2 \\ -\frac{b}{a}(x-4)^2; & 2 \leq x < 5 \end{cases}$$

Encuentre los valores de las constantes a , b y k para que los límites de $g(x)$ existan en todo punto donde está definida.

68. PC2 (10-2)

Sean f y g funciones definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x+\pi)}{\frac{x}{\pi} + 1}; & -\pi < x \\ \frac{(x+\pi)(x-2\pi) + 2\pi x + 2\pi^2}{-x-\pi}; & x < -\pi \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -2x \sin\left(\frac{x}{2}\right); & x \neq \pi \\ \pi; & x = \pi \end{cases}$$

- a) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\pi} f(x)$
- b) Halle el valor de $E = \lim_{x \rightarrow -\pi} (g \circ f)(x) + \lim_{x \rightarrow -\pi} (f \circ g)(x)$

69. PC2 (10-1)

Si la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan(x)}{x}; & x > 0 \\ \frac{x}{\sqrt{kx+m}-2}; & x < 0 \end{cases}$$

, y existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, halle el valor de las constantes reales k y m .

70. PC2 (09-2)

Sea f la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + (k-1)x - k}{x^2 + x - 2}; & x > 1 \\ 3; & x = 1 \\ \frac{2\sin^2\left(\frac{1-x}{k}\right)}{(1-x)^2}; & x < 1 \end{cases}$$

Si existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ para todo número real a , encuentre el valor de $k < 0$.

71. PC2 (09-1)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x-a & x < -3 \\ ax+2b & -3 \leq x \leq 3 \\ b-5x & 3 < x \end{cases}$

Determine los valores de a y b tales que $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ y

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ existan.

72. PC2 (08-2)

Sean f y g dos funciones definidas como:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & x \leq 1 \\ x+1, & x > 1 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$$

Calcule si existen, los siguientes límites:

- i. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
- ii. $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x))$

73. PC2 (08-2)

Si $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3 - 8}, & x \neq 2 \\ \frac{3}{4}, & x = 2 \end{cases}$ ¿Es cierto que

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$? Justifique

74. PC2 (08-1)

Dada la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x^2-4}, & \text{si } x < -2 \\ x^2 + ax - b, & \text{si } -2 < x < 4. \\ \frac{2x^2 - 9x + 4}{x-4}, & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

, siendo a y b constantes reales. Si existen $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = M$, halle los valores de a , b , L y M .

75. PC2 (07-2)

Sea f la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 5x + 6}, & x < -2 \\ \frac{x^3 + 8}{x^2 + bx + a}, & -2 < x \end{cases}$$

Hallar los valores de las constantes a y b , sabiendo que la función f tiene límite en -2 .

76. PC2 (07-2)

Dada la función $F(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & x < 0 \\ 4\sqrt{x+1} & x \geq 0 \end{cases}$ definimos la función $f(x) = \frac{F(2x) - F(x)}{x}$, para $x \neq 0$. Hallar en caso exista:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

77. PC2 (07-1)

Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + \beta x^2 - x - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ 5 & x = 1 \end{cases}$. Si $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ existe, halle β y calcule dicho límite

78. PC2 (07-0)

Hallar los valores de a , b y c , para que exista

$$\lim_{x \rightarrow 9} f(x), \text{ si: } f(x) = \begin{cases} \frac{b(2x-a)}{2 - \sqrt[3]{x-1}}, & 9 \leq x \\ \frac{x^2 - 2x + c}{x - 9}, & 9 > x \end{cases}$$

79. PC2 (06-1)

Si la función f es definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 + 3x^2 - 8x + 3}{x^2 + 2x - 3} & \text{si } x < 1; \quad x \neq -3 \\ \frac{2x^3 + \alpha x^2 - \beta x}{x - 1} & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ y existe}$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, hallar las constantes reales α y β .

80. PC2 (05-2)

Si la función f es definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x-10}{x^2-2x-15} & \text{si } x < 5 \\ \frac{\sqrt{\alpha x - \beta} - 2}{x - 5} & \text{si } x > 5 \end{cases} \text{ y existe } \lim_{x \rightarrow 5} f(x),$$

hallar las constantes reales α y β .

81. PC2 (04-1)

Hallar los valores de las constantes A, B y C si

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \text{existen}$$

$$f(x) = \begin{cases} Ax - 2B & \text{si } x \leq -1 \\ 2Ax^3 + Bx & \text{si } -1 < x < 1. \\ -Bx - C & \text{si } 1 \leq x < 3 \end{cases}$$

82. PC2 (02-1)

Dadas las funciones:

$$f(x) = x^2 - 2x + 2$$

y

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x + |1-x|}{x^2 + 1}, & \text{si } x < 1 \\ \frac{x^2 - 1}{4x - 4}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$, en caso que éste exista.

- b) Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} f(g(x))$

83. PC2 (01-2)

Dadas las funciones

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{x + 1} & x > 0 \\ \sqrt{1-x} & x < 0 \end{cases} \text{ y } g(x) = 2x - 1, \quad x > 1$$

- a) Justificar la existencia de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

- b) Si existe, hallar el siguiente límite $\lim_{x \rightarrow 0^+} (g \circ f)(x)$.

C. VALOR ABSOLUTO

84. PC1 (19-2)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \ln \left(\frac{2-|x|}{|x-5|-3} \right)$$

85. PC2

Calcule los siguientes límites si es que existen:

a) (16-2) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt[3]{3x+5} - 2}{|x^2 - 1|}$

b) (16-1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 4x - 4}{|x - 1|}$

c) (15-2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{|x - 3|}$

d) (13-1) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x - 3|}{|x^2 - 1| + 4x - 20}$

e) (12-1) $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{|x^2 - 16| - 9}{|x - 5|}$

f) (07-0) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x|x-2|}{|2x-1|-1}$

g) (07-1) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + |x^2 - 4|}{\sqrt{2-x}}$

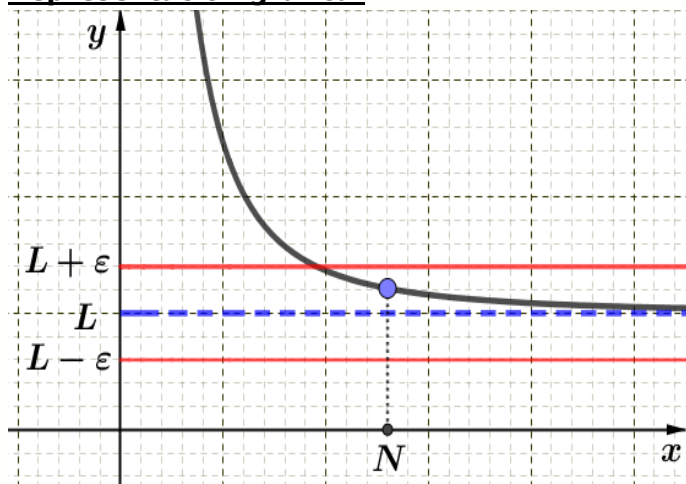
h) (06-1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2 - 8x + 15|}{3 - x}$

LÍMITES INFINITOS Y AL INFINITO

Límites al infinito

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \equiv \forall \epsilon > 0, \exists N > 0 \text{ tal que si } x > N \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

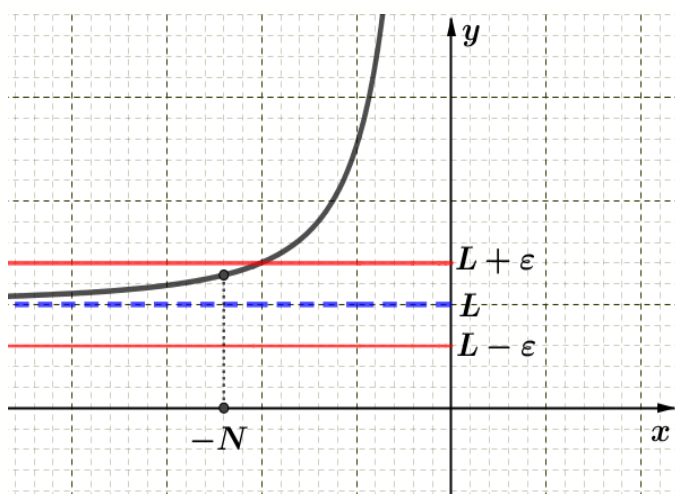
Representación gráfica:



Nota: la recta horizontal $y = L$ es denominada **asíntota horizontal derecha**.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \equiv \forall \epsilon > 0, \exists N > 0 \text{ tal que si } x < -N \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

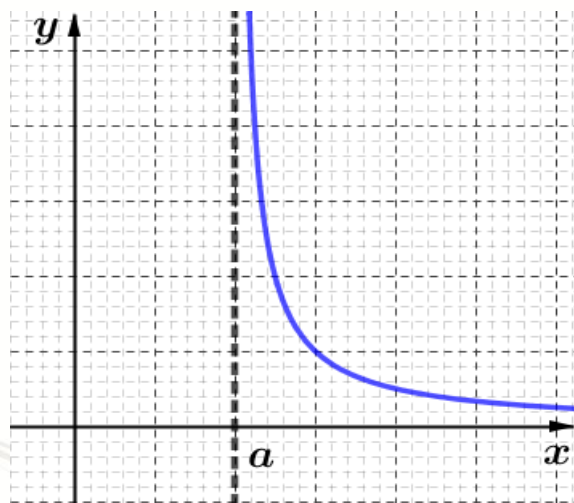
Representación gráfica:



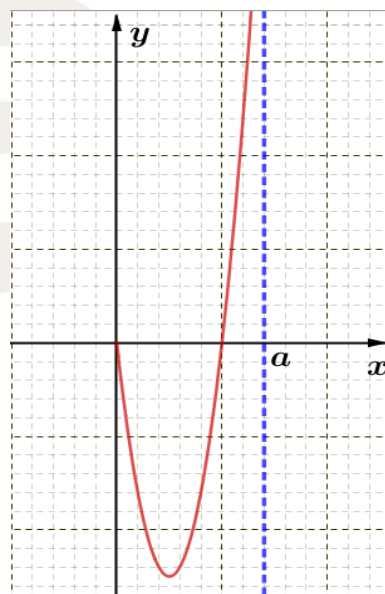
Nota: la recta horizontal $y = L$ es denominada **asíntota horizontal izquierda**.

Límites infinitos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \equiv \forall M > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que si } a < x < a + \delta \rightarrow f(x) > M$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \equiv \forall M > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que si } a - \delta < x < a \rightarrow f(x) > M$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \equiv \forall M > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que si } a < x < a + \delta \rightarrow f(x) < -M$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \equiv \forall M > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que si } a - \delta < x < a \rightarrow f(x) < -M$$

Nota: si una función verifica alguno de los cuatro límites se dirá que la recta $x = a$ es una **asíntota vertical** a la gráfica de la función $y = f(x)$.

I. Definición

86. PC2

Defina

a) (14-1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$

b) (13-2) $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$

c) (13-1) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$

d) (06-2) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$

e) (05-2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

87. PC2

Usando la definición de límite, demuestre que:

a) (15-2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x+3}{2x-1} = 3$

b) (14-1) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-5}{x-3} = +\infty$

c) (14-0) $\lim_{x \rightarrow 7^+} \frac{2x}{x-7} = +\infty$

d) (12-1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3}{x-2} = 2$

e) (10-2) $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}^+} \frac{2}{3x-2} = +\infty$

c) (09-1) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+2}{x-3} = +\infty$

f) (01-1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{4x+2} = \frac{1}{2}$

88. PC2(00-2)

Demuestre, usando definiciones correspondientes, la siguiente propiedad:

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L < 0$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)g(x)) = -\infty.$$

II. Cálculo de Límites

Límites conocidos

$$\frac{1}{\infty} = 0; \quad \frac{1}{0^+} = +\infty; \quad \frac{1}{0^-} = -\infty;$$

$$\infty + \infty = \infty; \quad \infty \times \infty = \infty$$

A. CASO: $\frac{\infty}{\infty}$: $\begin{cases} \text{En división de polinomios} \\ \text{Factorizar el término de mayor grado} \\ \text{del numerador y denominador} \end{cases}$

89. Calcular los siguientes límites:

a) PC1 (17-1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{9x^2+x-1}}$

b) PC1 (16-1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2\sqrt{x^2-5x}}{5x^3-3x^2+|x|\sqrt{x^4+1}}$

c) PC2 (12-1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\pi x}{\sqrt{x^2+\pi}}$

d) PC2 (06-2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3-2x+2}{\sqrt{x^6+x-1}}$

e) PC2 (04-0) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{x^2-5}}$

B. CASO: $\infty - \infty$: $\begin{cases} \text{En polinomios} \\ \text{Multiplicar por la conjugada} \\ \text{ó trinomio} \end{cases}$

90. PC1 (19-0)

Si el siguiente límite existe, determine el valor de m y de L .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{6x^2-x^3} - mx) = L$$

91. PC2

Evaluar los siguientes límites

a) PC1 (18-1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3} - x) \cos(x)$

b) PC1 (18-1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3} - x) \arctan(x)$

a) (16-2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - x \right)$

b) (15-2) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{x}{x^3-2x+1} \right)$

c) (15-1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+2} - x)$

d) (15-1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{|x+x^2|} + x$

e) (15-1) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x^5}{x^4-1} - \frac{x^4}{x^3-1} \right)$

f) (14-2) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x^4}{x^3-1} - \frac{x^3}{x^2-1} \right)$

g) (14-1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-5x} + x)$

h) (13-2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2+x+2x})$

i) (13-1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x} - x)$

j) (13-0) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{\sqrt{x^2+\pi x} - x}{2} \right)$

k) (12-2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2+1} + \sqrt{2}x)$

l) (12-1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[4]{x^4+1} - x)$

m) (06-1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x-1} - \sqrt{x^2-x+1})$

n) (05-2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+3x+2} - \sqrt{x^2-5x+1})$

o) (01-2) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \left(\frac{x+1}{2x^2-3x-2} - \frac{x}{2x^2+7x+3} \right)$

p) (00-2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2 - \sqrt{x^2-x+3})$

q) (00-2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} \right)$

C. CASO:

$$0 \times \sin(\infty) \text{ ó } 0 \times \cos(\infty) : \begin{cases} \text{Usar Teor. del Sandwich} \\ \text{y recordar : } -1 \leq \sin x \leq 1 \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \end{cases}$$

92. Calcular los siguientes límites:

a) PC1 (20-0) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{\frac{5}{x}} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) + 1}{\frac{1}{x} \sin(x) + \frac{2x-1}{3x+2}} \right)$

b) PC1 (19-2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{3 + \cos x}$

c) PC1 (18-2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \cos x}$

d) PC1 (17-1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{3 + \sin(x)}$

e) PC2 (14-1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\pi x^2)}{x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}$

f) PC1 (14-1) $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 \cos\left(\frac{x^2}{x-1}\right) \sec(x-1)$

g) (14-0) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4x + 4) \cos\left(\frac{x}{x-2}\right)}{\sec((x-2)^2)}$

h) PC2 (12-2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{3x^2 + 2x + 5} \cos\left(\frac{x^3}{x+1}\right)$

i) PC2 (12-2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$

j) PC2 (11-1)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\left(x - \frac{\pi}{2} \right)^2 \cos\left(\frac{1}{\left(x - \frac{\pi}{2} \right)^2} \right) + \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \tan(x) \right]$$

k) PC2 (10-2) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\sqrt[3]{x^2-1} \cos\left(\frac{3\pi(x^2+3)}{x^2-3x+4} \right) \right]$

l) PC2 (05-1) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 1) \sin\left(\frac{x^2}{x-1} \right) \sec(x-1)$

93. PC2(16-1)

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} x[f(x) - \alpha] = 0$, calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
Justifique.

94. PC2(07-1)

Sea $f(x)$ una función tal que $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2+1}$,
demuestre que $\lim_{x \rightarrow 0} x^{10} f(x) = 0$.

95. PC2(02-1)

Sean f y g dos funciones tales que existe una constante positiva M verificando, $|f(x)| < M, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$g(x) = \begin{cases} 2 \sin(x), & \text{si } x \neq \pi \\ 4, & \text{si } x = \pi \end{cases}$$

Usando el teorema del sándwich hallar $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) \cdot g(x)$.

TEÓRICAS

96. PC1 (20-0)

Demuestre que existe $\delta > 0$, tal que para todo x , $0 < x < \delta$ se cumple:

$$\frac{1 - \cos(x)}{x^5} > \frac{1}{5}$$

97. PC1 (20-0)

Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones justificando rigurosamente su respuesta.

- a) Si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, entonces existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow \frac{1}{2} < f(x) < \frac{3}{2}$$

- b) Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x)f(x) = 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe.

98. PC1 (19-2)

Analice el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

- a) Si $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(\sin x - x) = 1$$

- b) Si $8 + 2a + b = 0$ entonces $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x - 10}{2x^2 + ax + b}$ no existe

- c) Existe un número real x para el cual se cumple la siguiente desigualdad.

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \sqrt{x+10} < \sqrt{x} + 1$$

99. PC1 (19-1)

Analice el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

- a) Si $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{f(x)} = 0$$

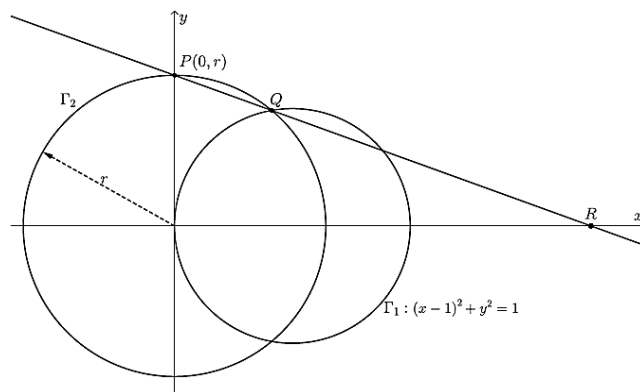
- b) Si $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{f(x)} = 0$ entonces $\lim_{x \rightarrow 1^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

- c) Si $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ entonces $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2) = 0$

100. PC1 (19-1)

En la figura se muestra una circunferencia Γ_1 con ecuación $(x-1)^2 + y^2 = 1$ y una circunferencia Γ_2 con radio r y centro en el origen. P es el punto $(0, r)$, Q es el punto superior de intersección de las dos circunferencias

y R es el punto de intersección de la recta $\overline{PQ}$ y el eje X . Suponga que mientras la circunferencia Γ_1 permanece fija, el radio de Γ_2 tiende a 0. Verifique que la posición límite del punto R es el punto $(4, 0)$.



101. PC1 (19-0)

Analice la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

- a) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^4 = 16$ entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2$ o entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -2$.

- b) Si $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = 0$ entonces $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

- c) Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Si f es continua en a , entonces f es continua en $a+1$.

- d) Si $\lim_{x \rightarrow 0} [\sin(x)f(x)] = 0$ entonces $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

102. PC1 (18-1)

Analice el valor de verdad de las siguientes afirmaciones

- a) Si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ entonces $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

- b) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ y además $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ entonces $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$.

103. PC1

Justificando su procedimiento, analice la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones

- a) (15-0) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe y $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ no existe, entonces $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ no existe.

- b) (15-0) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe, entonces $f(a)$ existe.

- c) (14-2) Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g} \right)(x)$ existe entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ existen
- d) (14-2) Si $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$, existe un $\delta > 0$ tal que $0 < |x - 2| < \delta$ implique que $\frac{10}{4} < f(x) < \frac{9}{2}$
- e) (13-2) Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$.
- f) (13-2) Si $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = L$, $L > 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$
- g) (06-2) Si $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, entonces $f(1) = 2$.
- h) (06-2) Si las funciones f y g son tales que $f(x) \cdot g(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$.
- i) (06-2) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = L^2$ existe y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 + L^2$, entonces existe $\lim_{x \rightarrow a} g^2(x)$.
- Para la función $f(x) = \frac{2x-1}{3}$ con $x \in]1, 5[$, se cumple que $\left| f(x) - \frac{5}{3} \right| < \frac{1}{150}$ siempre que $0 < |x - 3| < \frac{1}{100}$.
- j) (06-1) Si $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ existe, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existen.
- k) (06-1) Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe y es distinto de cero, entonces $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$.

104.PC2(12-0)

Analizar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones, justificando sus respuestas:

- a) Si $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = 2$ y $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - g(x)) = 1$ entonces $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 3$
- b) Si $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ no existe, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ no existe y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ no existe.
- c) Si $f(x) < 0$ para todo $x \in]-\delta, \delta[$ y existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, entonces $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) < 0$.

105.PC2(11-2)

Analice la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones. Justifique sus respuestas.

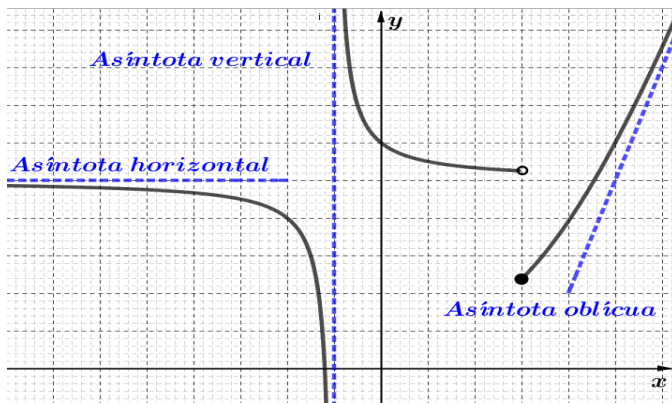
- a) Si $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)]$ existe entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existen.
- b) Si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A$ entonces $\lim_{x \rightarrow 0} f(x - \sin(x)) = A$.
- c) Para la función f definida por $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, se cumple que: $0 < |x - 3| < \frac{3}{40} \rightarrow |f(x) - 2| < \frac{1}{30}$

106.PC2(09-2)

Demuestre que:

- a) Si $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = 1$ entonces no existe $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$

GRÁFICA DE FUNCIONES



A. ASÍNTOTAS VERTICALES

107.PC2(10-2)

Hallar todas las asíntotas verticales a la gráfica de la

función f , definida por:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{x^3 - 3x^2 + 2x} & ; x > 0 \\ \ln(-x) & ; x < 0 \end{cases}$$

108.PC2(10-1)

Encuentre las asíntotas verticales a la gráfica de la

función $f(x) = \frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2}{x^3 + x^2 - 6x}$

B. ASÍNTOTAS HORIZONTALES Y OBLICUAS

109.PC1 (19-2)

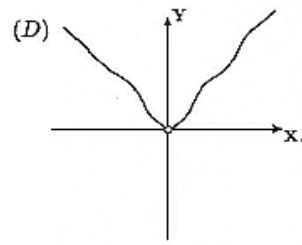
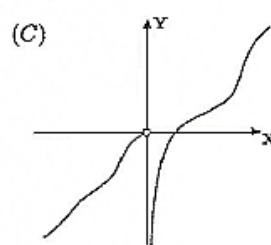
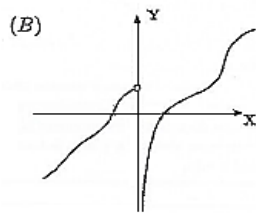
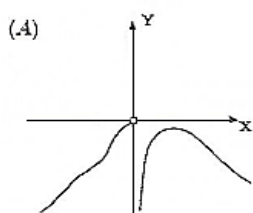
La función $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ es dada por

$$f(x) = x - \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x + \sin x}$$

a) Calcule los siguientes límites

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) Indique cuál de los siguientes bosquejos es más apropiado para representar a la gráfica de f . Justifique.



110.PC1 (18-2)

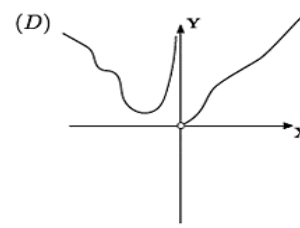
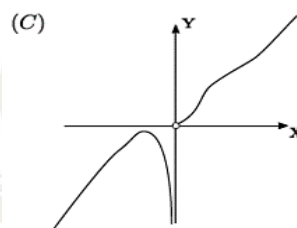
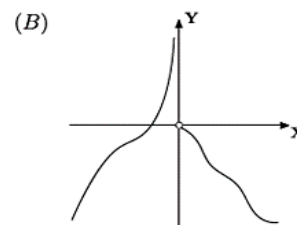
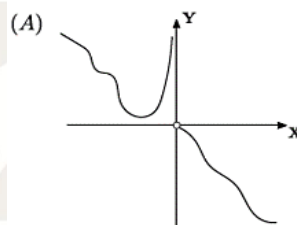
La función $f: \mathbb{R} - [0] \rightarrow \mathbb{R}$ es dada por

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{xe^{\frac{1}{x}}} + x$$

a) Calcule los siguientes límites

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

b) Indique cuál de los siguientes bosquejos es más apropiado para representar a la gráfica de f . Justifique.



111.PC1 (18-1)

Considere la función $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

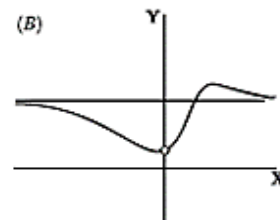
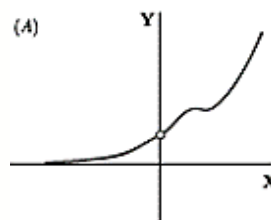
$$f(x) = e^2 + x^2 \left(1 - \cos^2 \left(\frac{1}{x} \right) \right) \text{ Para } x \neq 0$$

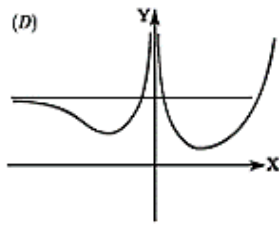
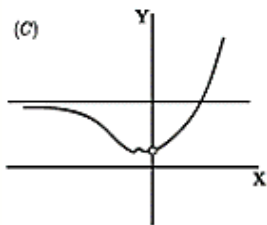
a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

b) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

c) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

d) Indique cuál de los siguientes bosquejos es más apropiado para la gráfica de f . Justifique correctamente su elección.





112.PC1 (17-2)

Sea la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x^4 + 1} + x^2}{x^2}, & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x^3 - x^2 - x}{x^2 - 2x - 8}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

bosqueje la gráfica indicando sus asíntotas e interceptos con los ejes coordenados.

113.PC2 (17-0)

Halle las asíntotas de la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + x^2}$$

Y a partir de dichos resultados, esboce la gráfica de f .

114.PC2 (16-2)

Halle las asíntotas de la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{2x^2 + 8x}{|x - 1|x^2 - x^3}$$

, y esboce la gráfica de f .

115.PC2 (16-1)

Halle las asíntotas de la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x^2+3x} & \text{si } x > 0, \\ \sqrt{x^2-9x}-x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

, y esboce la gráfica indicando los puntos de intersección con los ejes de coordenadas

116.PC2 (16-1)

Esboce la gráfica de una función f que cumpla todas las condiciones siguientes:

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- $f(x) = f(-x)$, para todo x real excepto -2 y 2
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 4 \neq f(-2)$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5$
- $f(3) = 6$

117.PC2 (15-2)

Dada la función $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4x}}{2 - x}$

- Halle el dominio de f y los puntos de intersección de su gráfica con los ejes coordenados.
- Determine las ecuaciones de todas las asíntotas de la gráfica, si existen.
- Esboce la gráfica de la función f

118.PC2 (15-1)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{(x^2 - 1)(x + 1)}{-x^2 + x + 6}, & x > 3 \\ \frac{x^2}{(x - 3)^2}, & x < 3 \end{cases}$

- Halle las asíntotas de la gráfica de f .
- Bosqueje la gráfica de f .

119.PC2 (15-0)

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{2x^2 - 1}}, & x < -1/2 \\ \frac{(x-1)^2}{2x+1}, & x > -1/2 \end{cases}$$

Halle las asíntotas de la gráfica de f y esboce la gráfica indicando los puntos de intersección con los ejes coordenados.

120.PC2 (14-2)

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{4x^2 - 16} - x, & \text{si } x < -2 \\ \frac{x^3 - 5x^2 - x + 5}{x^3 - 2x^2 - 8x}, & \text{si } x > -2, x \neq 0, x \neq 4 \end{cases}$$

- Halle las ecuaciones de las asíntotas de la función
- ¿La gráfica interseca a las asíntotas? Justifique su respuesta.
- Halle los puntos de intersección con los ejes coordenados
- Esboce la gráfica de la función

121.PC2 (14-0)

Halle las asíntotas de la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3}{x - 1} & \text{si } x > 1 \\ \frac{x^2}{x^2 - 4} & \text{si } x \leq 1, x \neq -2 \end{cases}, \text{ y esboce la}$$

gráfica indicando los puntos de intersección con los ejes de coordenadas.

122.PC2 (14-1)

Halle las asíntotas de la gráfica de la función

$$f(x) = 5 - x + \sqrt{x^2 + 3} \text{ y esboce la gráfica indicando los puntos de intersección con los ejes de coordenadas}$$

123.PC2 (13-2)

Halle la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{(x+3)^2}{x+2} & \text{si } x < -2 \\ \frac{x^2-1}{3x-9} & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ \frac{x+3}{x-3} & \text{si } x > 3, \end{cases}$$

Y esboce la gráfica indicando los puntos de intersección con los ejes de coordenadas.

124.PC2 (13-1)

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2-x-2} + \frac{1}{2} & \text{si } x < 2, x \neq -1 \\ \frac{x^2-4x}{\sqrt{x^2-4}} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- Halle las asíntotas de la gráfica de f
- Bosqueje la gráfica de f y de sus asíntotas, indicando los puntos de intersección con los ejes coordenadas.

125.PC2 (13-1)

Si f es una función definida para todo $x \in \mathbb{R}$ y la recta $y = -3x + 2$ es asíntota oblicua izquierda de su gráfica, halle

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{9x^2 - \sin(x)}}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) - \sqrt{9x^2 + 9x + 3} \right]$.

126.PC2 (13-0)

Esboce la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

indicando su dominio, rango y asíntotas.

127.PC2 (12-2)

Sabiendo que la recta $L: y = 2x + 1$ es asíntota oblicua a la derecha de la gráfica de la función f ,

calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{3x-2}$

128.PC2 (12-2)

a) Sea f una función definida por

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}, |x| > 2. \text{ Halle todas las}$$

asíntotas a la gráfica de f .

b) Sea g una función definida por

$$g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}, |x| < 2. \text{ Halle todas las}$$

asíntotas a la gráfica de g .

c) Esboce la gráfica de f y g en un mismo plano cartesiano

129.PC2 (12-1)

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-x+1}{x^2-1} & \text{si } -1 < x < 1 \\ \sqrt{x^2-1} & \text{si } x \leq -1 \text{ ó } x \geq 1 \end{cases}$$

, halle todas las asíntotas (verticales y no verticales) y bosqueje la gráfica de f .

130.PC2 (10-1)

Dibuje la gráfica de alguna función f que cumpla con todas las siguientes condiciones:

- Dominio de f es $[-4, 4] - \{2\}$
- $f(-4) = 0, f(-2) = 0, f(-1) = 2, f(0) = 3, f(4) = 3$
- $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty,$
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty,$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 0$

131.PC2 (09-1)

Halle, si existen, las asíntotas oblicuas del gráfico de la

función: $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}} + x - 5.$

132.PC2 (06-2)

Hallar las asíntotas de la gráfica de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 3}{x^3 + 3x^2 + 2x} & \text{si } x < 0, x \neq -1, x \neq -2 \\ \sqrt{5x^2 + x + 2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

133.PC2 (06-2)

Bosquejar la gráfica de la función f que cumpla las siguientes condiciones.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -5} f(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
- Además, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}, f(-5) = 0, f(-3) = 0, f(-2) = 0, f(0) = 0, f(2) = 3, f(3) = 0$ y $f(4) = 0$

134.PC2 (06-1)

Bosquejar la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{x^2 - 25} & \text{si } x > -1, x \neq 5 \\ \sqrt{4x^2 + 3x} & \text{si } x \leq -1 \end{cases} . \text{ Señalando, si fuera}$$

el caso, las asíntotas de la gráfica y los puntos de intersección de la gráfica con los ejes coordenados y con sus asíntotas.

135.PC2 (05-2)

Bosquejar la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x-5}{\sqrt{x^2+3x+2}} & \text{si } x < -2 \vee -1 < x \leq 3 \\ \frac{2x^2-7x+1}{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Señalando, si fuera el caso, las asíntotas de la gráfica y los puntos de intersección de la gráfica con los ejes coordenados y con sus asíntotas. Calcular también el rango de la función.

136.PC2 (05-1)

Esbozar la gráfica de una función f definida en $\mathbb{R}$, tal que:

- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$.
- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ no existe y la recta $x = -1$ no es asíntota vertical de la gráfica de f .

137.PC2 (05-1)

Dada la función

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 3x^2 - 4x + 2}{x^2 - 1}, & x < 0, x \neq -1 \\ \frac{\sin(x)}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

- ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$? Justifique su respuesta.
- Hallar la(s) asíntota(s) vertical(es) de la gráfica de g , justificando su resultado.

138.PC2 (04-2)

Graficar una función que verifique simultáneamente las siguientes condiciones:

- $\text{Dom}(f) = [-2; 2]$.
- $f(-2) = 0; \quad f(-1) = 0;$
 $f(0) = 5; \quad f(1) = -5; \quad f(2) = 3.$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= -\infty; & \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= 3. \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= +\infty; & \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= +\infty; & \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= -\infty; & \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= -\infty \end{aligned}$$

139.PC2 (04-2)

Dar la regla de correspondencia de una función racional f (cociente de dos polinomios) que cumpla las siguientes condiciones:

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3; -2; 2; 3\}$.
- $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \frac{9}{2}$.
- El $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ es un número real.
- Las rectas $x = -3$ y $x = 2$ son asíntotas verticales de su gráfico.

140.PC2 (03-1)

Grafica una función $y = f(x)$ que cumpla las siguientes condiciones:

- $\text{Dom}(f) = [-1, 3]$ y $\text{Ran}(f) = [-2, 5]$;
- $f(-1) = 2, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 3, \quad f(2) = 4$ y $f(3) = 1$;
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -2, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0,$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4,$
 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 5$

141.PC2 (01-1)

Determinar las asíntotas y esbozar la gráfica de:

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 2}.$$

142.PC2 (00-2)

Determine, justificando su proceso, las asíntotas de la

$$\text{función: } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{-x - 1}, & \text{si } x < -1 \\ \frac{x^3}{(x+1)^2}, & \text{si } x > -1 \end{cases}.$$

143.PC2 (00-2)

La recta L es asíntota en $-\infty$ de la función

$$f(x) = \frac{ax^2 + 3}{\sqrt{x^2 + 1}}, \text{ con } a \text{ una constante real dada. Si la pendiente de } L \text{ es } -2/3, \text{ halle la ecuación de } L.$$

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

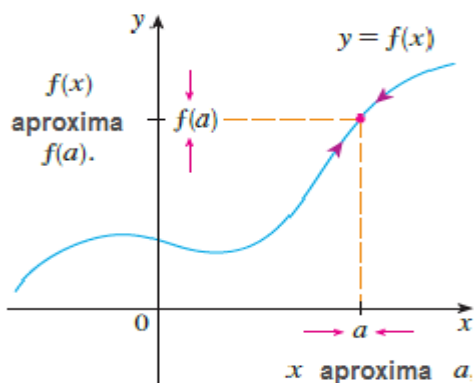
La función f es continua en $x = a$ si se cumple:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

De manera equivalente, esta definición se puede plantear de la siguiente manera:

- i) $\exists f(a)$
- ii) $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- iii) i = ii

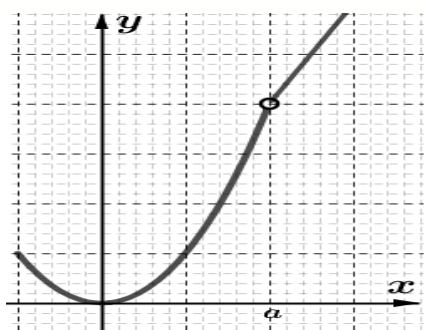
Representación gráfica



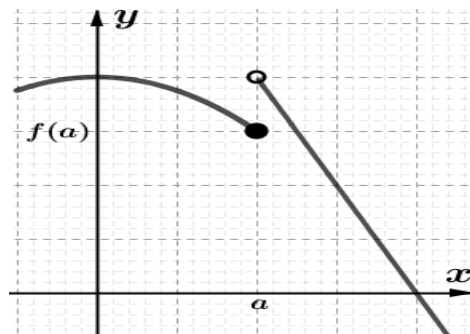
NOTA: Se dice que una función es discontinua en el punto $x = a$ cuando esta no es continua en dicho punto.

Diremos que una función $f(x)$ tiene una discontinuidad en $x=a$ si se presenta alguna de las siguientes situaciones.

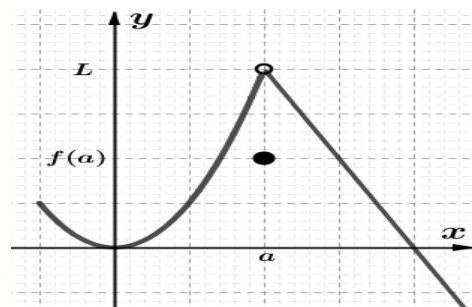
- 1) $x = a$ no es un punto del dominio de $f(x)$



- 2) No existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.



- 3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe, pero $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$.



144.PC1 (19-2)

La función $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ es dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a-x^3}{x^2-2x}, & \text{si } x < 2, \\ \frac{bx-c}{x}, & \text{si } 2 \leq x \leq 4, \\ \frac{x-4}{2-\sqrt{x}}, & \text{si } x > 4. \end{cases}$$

Determine los valores de a, b y c para que f sea una función continua.

145.PC1 (19-1)

Sea $f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{\sin^2(x/2)}, & \text{si } -1 < x < 0; \\ 0, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

¿Es f continua en $x=0$?

146.PC1 (19-0)

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + x - a}{x - a}, & x \neq a \\ a + 1, & x = a \end{cases}$$

- c) Considere el caso $a = -1$ y analice si f es continua en a . Justifique su respuesta.
- d) Considere el caso $a = 1$ y analice si f es continua en a . Justifique su respuesta.
- e) Encuentre todos los valores de a para los cuales f resulta ser continua en todos los reales.

147.PC2 (19-0)

Dada la función $f :]-\frac{5}{2}, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan(\pi x)}{x+2} & \text{si } -\frac{5}{2} < x < -2 \\ ax+b & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{2\operatorname{sen}x + 3\operatorname{sen}^2x}{x+2x^4} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Determinar los valores de a y b para que la función f sea continua en su dominio.

148.PC2 (18-2)

La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 - x}{a - x} & x \neq a \\ a & x = a \end{cases}$$

- Para $a = -1$, diga si f resulta ser una función continua (es decir, si f resulta ser continua en cada punto de su dominio). Justifique apropiadamente.
- Para $a = 1$, diga si f resulta ser una función continua (es decir, si f resulta ser continua en cada punto de su dominio). Justifique apropiadamente.
- Encuentre todos los valores de a para los cuales f resulta ser continua en cada punto de su dominio.

149.PC2 (18-1)

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x}, & \text{para } x > 0, \\ e^x(x-1), & \text{para } x \leq 0. \end{cases}$$

¿Es f continua en 0? Justifique su respuesta.

150.PC2 (18-1)

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(x), & \text{para } x \geq a, \\ x^2 \cos(x), & \text{para } x < a. \end{cases}$$

Encuentre todos los valores de $a \in [-1, 1]$ para los cuales f resulta ser una función continua (es decir, continua en cada punto de su dominio)

151.PC2 (16-2)

Sea $f(x) = ax^2 + b$, con $a \neq 0$. Sea g la función definida por

$$g(x) = \begin{cases} \left(\frac{\sqrt{x+9} - 3}{x} \right) \cdot f(x+1), & x > 0, \\ \frac{\operatorname{sen}(ax)}{x} - e^{-bx}, & x < 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Asumiendo que g es continua en todo $\mathbb{R}$, halle los valores de a y b .

152.PC2 (17-1)

Con la definición de continuidad y las propiedades de los límites, demuestre que la función $f(x) = x\sqrt{16-x^2}$ es continua en el intervalo $[-4, 4]$.

153.PC2 (16-1)

Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Encuentre los valores de a y b para los cuales la función $g(x) = f(x-a) + bf(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

154.PC2 (15-2)

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x\operatorname{sen}(ax-a) - b\cos(bx-b) - 2\operatorname{sen}(ax-a) + b}{x^2 - 2x + 1} & x < 1 \\ 8 & x = 1 \\ \frac{ax-a}{2\sqrt{x-2}} & x > 1 \end{cases}$$

Determine los valores de a y b para que la función sea continua en su dominio.

155.PC2 (15-1)

Sean $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x+1}$ y $g(x) = x^2 + \frac{2}{x}$

- Analice la continuidad de $g \circ f$ en $x = 2$.
- Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} [(g \circ f)(x) + (f \circ g)(x)]$.

156.PC2 (15-1)

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{x}, & \text{si } x < 0 \\ -1, & \text{si } x = 0 \\ \frac{b \left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \right]}{x}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Halle los valores de a y b , si f es continua en todo $\mathbb{R}$.

157.PC2 (15-0)

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 5 + a + bx^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ b + 5x - ax^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0 \end{cases}$$

Halle los valores de a y b para que la función f sea continua en $x = 0$

158.PC2 (12-1)

Halle a , b y c de modo que la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c-x^3}{x^2-2x} & \text{si } x < 2 \\ \frac{ax-b}{x} & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ \frac{x-4}{2-\sqrt{x}} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

, sea continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

159.PC2 (04-0)

Analizar la continuidad de la función f dada por:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 6x + 8}. \text{ Esbozar la gráfica de } f \text{ y de sus}$$

asíntotas, si existen.

160.PC2 (01-1)

Analice la continuidad de la función en todo su dominio.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{|x^2 - \pi^2| + \pi x + \pi^2}{x + \pi} & x < -\pi \\ 2\sqrt{\pi} & x = -\pi \\ 2\pi\sqrt{\pi} \left(\frac{\sqrt{x+2\pi} - \sqrt{\pi}}{x + \pi} \right) & x > -\pi \end{cases}.$$

EXTENSIÓN CONTINUA**161.PC1 (19-2)**

La función $f:]0, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ es dada por

$$f(x) = e^{\cos(1/x)} \tan x$$

- Defina una extensión continua $g:]0, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ de la función f
- Defina una extensión continua $h:]0, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ de la función f o explique por qué tal extensión no existe.

162.PC1 (19-1)

Sea $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{e^x + \arctan(x) \operatorname{sen}(1/x)}{e^{1/x} + 1}$$

- Calcule los siguientes límites:
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- Defina una extensión continua $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de la función f o explique por qué tal extensión no existe.

163.PC2 (19-0)

La función $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$f(x) = \frac{\cos(\ln(x))}{\ln(x) \cos(x)} + e^{-\frac{2}{x}} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

- ¿Es f una función continua en $]0, 1[$? Justifique su respuesta.
- ¿Es posible definir una extensión continua $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de la función f ? o explique por qué tal extensión no existe y defina donde sí sea posible.

164.PC2 (18-2)

La función $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sin x - \ln(1-x)}$$

- a) Defina una extensión continua $g :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de la función f o explique por qué tal extensión no existe.
- b) Defina una extensión continua $h : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ de la función f o explique por qué tal extensión no existe

165.PC2 (18-1)

La función $f : \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R}$ es dada por

$$f(x) = \frac{\tan(x)}{x \tan(x) + 1}$$

- a) Defina una extensión continua $g : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ de la función f .
- b) Pruebe que existe al menos una solución para la ecuación.

$$\frac{\tan(x)}{x \tan(x) + 1} = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{\pi^2}$$

166.PC2 (17-2)

Sea $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = x \sin\left(\frac{x}{2\sqrt{x}}\right) + (x-1) \cos\left(\frac{2\pi}{\sqrt{1-x}}\right).$$

- a) Analice la continuidad de la función f .
- b) Defina una función g continua en $[0, 1]$ tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in]0, 1[$.

167.PC2 (17-2)

Sea $f :]0, 4[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x e^{x-4} \cos\left(\frac{x-4}{x^2}\right) - \left(\frac{x-4}{3x+1}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{x-4}\right)$$

- i) Analice la continuidad de f .
- ii) Defina una función g continua en $[0, 4]$ tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in]0, 4[$.

TIPOS DE DISCONTINUIDAD

Supongamos que $x=a$ es un punto de discontinuidad de la función. Entonces,

$$\begin{cases} \text{¿} \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{?} \end{cases} \begin{cases} \text{NO: discontinuidad esencial} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) : \text{de salto.} \\ \lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty : \text{infinita o asintótica.} \end{cases} \\ \text{SI: discontinuidad evitable, removible o eliminable.} \end{cases}$$

168.PC2 (16-1)

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(1-x) \arctan(x)}{x\sqrt{1-x^2}}, & \text{si } -1 < x < 1, x \neq 0 \\ 5, & \text{si } x = -1, 0, 1. \end{cases}$$

Determine los puntos de discontinuidad de f en su dominio, e indique de qué tipo son.

169.PC2 (15-2)

Una función f está definida por

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{kx^2 - 2kx + 1}.$$

Siendo k una constante en $\mathbb{R}$. Analizando los valores de k , halle las discontinuidades esenciales y removibles de la función f (si existen).

170.PC2 (13-0)

Dada la función

$$f(x) = \frac{ax^2 + b}{x^3 + 2ax^2 + bx + 3}$$

Determine el valor de las constantes a y b , sabiendo que la función f presenta una discontinuidad evitable en el punto de abscisa $x=1$

171.PC2 (13-0)

Sea f una función definida por

$$f(x) = \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}}.$$

Analice la continuidad de f , indicando, según sea el caso, los tipos de discontinuidad que presenta.

